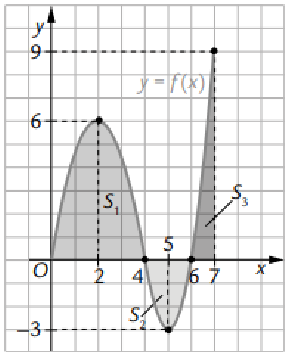
Liceo Scientifico “Dante Alighieri”, Crema
Simulazione seconda prova dell’Esame di Stato - a.s.2023/2024

Si scelgano uno dei due problemi e quattro degli otto quesiti.

Problema 1



Considera la funzione $f: [0, 7] \rightarrow \Re$, derivabile con derivata continua, rappresentata in figura. Nel grafico sono stati messi in evidenza i punti di estremo relativo, gli zeri e il punto di flesso (che coincide con uno zero).

Il grafico risulta simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = 2$ nell’intervallo $[0, 4]$ e rispetto alla retta di equazione $x = 5$ nell’intervallo $[4, 6]$. Inoltre la tangente al grafico della funzione f nell’origine è la retta di equazione $y = 6x$.

a. Rappresenta nel grafico la retta tangente alla funzione f nell’origine.

b. Scrivi l’equazione della funzione f, supponendo che, in ciascuno dei due intervalli $[0, 4]$ e $[4, 7]$, sia costituita da un arco di parabola con asse verticale.

c. Da ora in poi, considera la seguente espressione analitica per la funzione f:

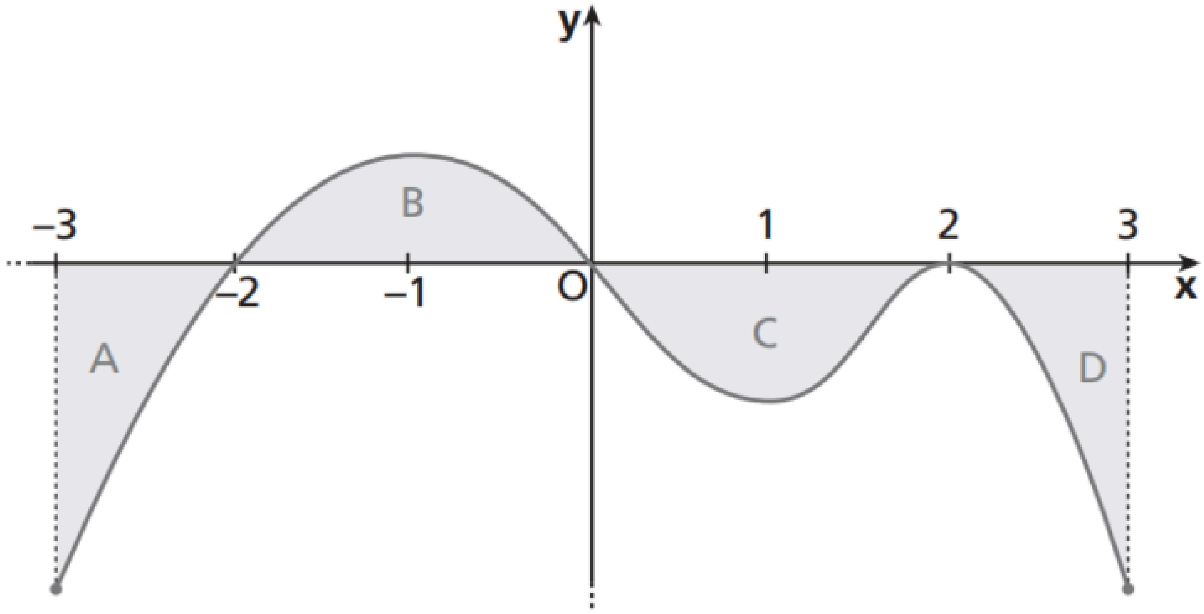
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}\left(x^2 - 4x\right) & 0 \leq x \leq 4 \\ 3\left(x^2 - 10x + 24\right) & 4 < x \leq 7 \end{cases}$$

Rappresenta i grafici della derivata prima e della derivata seconda di f, cioè di f' e f'', studiandone in particolare la continuità e la derivabilità. Nel punto di flesso della funzione f è vero che la derivata seconda si annulla? Giustifica la risposta.

d. Data la funzione $g: \Re - \{0\} \rightarrow \Re$, definita da $g(x) = \frac{a(b-x)}{x}$, determina a e b in modo che i punti del suo grafico di ascisse 3 e 6 siano in comune con il grafico della funzione f del punto precedente. In corrispondenza di questi valori di a e b, verifica che il grafico di g è tangente al grafico di f.

Problema 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3; +3]$, il grafico Γ disegnato in figura.



Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$.

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

2. Individua i valori di $x \in [-3; +3]$ per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

3. Calcola $g(0)$ e, usando il teorema di De L'Hopital, verifica $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x} = 0$.

4. Rappresenta il grafico di $f'(x)$, motivando tutti i passaggi in maniera approfondita.

Quesiti

1. Considera la funzione $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} + hx & x < 0 \\ \frac{k-x}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$, dove h e $k \in \Re$.

Determina h e k in modo che si possa applicare alla funzione f il teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$. Considerata la funzione che corrisponde ai valori di h e k trovati, determina tutti i suoi eventuali asintoti (verticali, orizzontali o obliqui).

2. Data la funzione $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}$, determina i valori dei parametri $a,\ b,\ c$ in modo che il suo grafico presenti un punto stazionario di coordinate $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ e intersechi l'asse x in $(3, 0)$. Verificato che $a = -1,\ b = 3,\ c = 16$, determina i punti di estremo relativo della funzione corrispondente e stabilisci se l'area della regione di piano contenuta nel secondo quadrante, limitata dal grafico di f e dall'asse x è finita o infinita.

3. Dato il piano α: $x - 2y - 2z - 2 = 0$, determina l'equazione del piano β, parallelo ad α e passante per il punto di coordinate $(6, -2, 3)$.

4. Data la funzione $f(x) = \left|4 - x^2\right|$, verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; +3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3; +3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla.

5. Si lanciano due dadi, le cui facce sono numerate da 1 a 6. Calcolare la probabilità degli eventi “la somma dei risultati è pari” e “il prodotto dei risultati è pari”.

6. Data la funzione $f(x) = e^x$, individuare la primitiva $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1; 2e)$.

7. Si verifichino i seguenti limiti in base alla definizione:

$$\lim_{x \to 5} log_2(x + 3) = 3; \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{(2-x)^2} = -\infty$$

8. Si risolva l'equazione $4\left(\frac{x}{4}\right) = 15\left(\frac{x-2}{3}\right)$.